

時間差データの処理について (12月16日続き)

観測点が N 個あり ($N \geq 3$)、 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ であるとする (それぞれの座標を $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3), \dots, (X_n, Y_n), \dots$ とする。) これらの点での流星エコーの観測時刻を $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$ としよう。WEB においた 20051216mondai.pdf での計算と同様に直線で近似したフットプリントの移動方向を表す単位ベクトルを $\vec{e} \equiv (e_x, e_y)$ 、その方向への移動速度を V とすると、次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}(X_2 - X_1)e_x + (Y_2 - Y_1)e_y &= (t_2 - t_1)V \\(X_3 - X_1)e_x + (Y_3 - Y_1)e_y &= (t_3 - t_1)V \\&\dots \\(X_n - X_1)e_x + (Y_n - Y_1)e_y &= (t_n - t_1)V \\&\dots\end{aligned}\tag{1}$$

$N = 3$ のときは、

$$\begin{aligned}(X_2 - X_1)e_x + (Y_2 - Y_1)e_y &= (t_2 - t_1)V \\(X_3 - X_1)e_x + (Y_3 - Y_1)e_y &= (t_3 - t_1)V\end{aligned}\tag{2}$$

であるが、 $\beta_x \equiv e_x/V$ 、 $\beta_y \equiv e_y/V$ とおくと、

$$\begin{aligned}(X_2 - X_1)\beta_x + (Y_2 - Y_1)\beta_y &= (t_2 - t_1) \\(X_3 - X_1)\beta_x + (Y_3 - Y_1)\beta_y &= (t_3 - t_1)\end{aligned}\tag{3}$$

なる 2 元連立方程式を得る。(20051216mondai.pdf では両辺を e_x で割りましたが、 e_x が零であるか否かで場合わけをする必要があり、 V で割る方がよさそうです。... V が零となる場合は考える必要がないので。)

$N > 3$ の場合には、(1) から、

$$\begin{aligned}
 (X_2 - X_1)\beta_x + (Y_2 - Y_1)\beta_y &= (t_2 - t_1) \\
 (X_3 - X_1)\beta_x + (Y_3 - Y_1)\beta_y &= (t_3 - t_1) \\
 &\dots \\
 (X_n - X_1)\beta_x + (Y_n - Y_1)\beta_y &= (t_n - t_1) \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{4}$$

を得るが、一般に右辺の時間差は誤差を含んでおり（データの読み取り誤差など）、(4) は近似式であって厳密には解けないであろう。（ $N = 3$ の場合も右辺には誤差が含まれていたはずで、得られた答えも誤差を含む。）そこで、(4) を解く代わりに、次式で与えられる I を最小化するように (β_x, β_y) を選ぶことを考える：

$$I \equiv \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \{(X_n - X_1)\beta_x + (Y_n - Y_1)\beta_y - (t_n - t_1)\}^2 \tag{5}$$

I が極値をとることから、 $\partial I / \partial \beta_x = 0$ 、 $\partial I / \partial \beta_y = 0$ となるので、

$$\frac{\partial I}{\partial \beta_x} = \sum_{n=2}^N \{(X_n - X_1)\beta_x + (Y_n - Y_1)\beta_y - (t_n - t_1)\} (X_n - X_1) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta_y} = \sum_{n=2}^N \{(X_n - X_1)\beta_x + (Y_n - Y_1)\beta_y - (t_n - t_1)\} (Y_n - Y_1) = 0$$

これを書き直して、

$$\begin{aligned}
 \left\{ \sum_{n=2}^N (X_n - X_1)^2 \right\} \beta_x + \left\{ \sum_{n=2}^N (X_n - X_1)(Y_n - Y_1) \right\} \beta_y &= \sum_{n=2}^N (X_n - X_1)(t_n - t_1) \\
 \left\{ \sum_{n=2}^N (Y_n - Y_1)(X_n - X_1) \right\} \beta_x + \left\{ \sum_{n=2}^N (Y_n - Y_1)^2 \right\} \beta_y &= \sum_{n=2}^N (Y_n - Y_1)(t_n - t_1)
 \end{aligned} \tag{7}$$

これは β_x 、 β_y についての 2 元連立方程式であるので、簡単に解くことができる（係数の計算に少々手間がかかるが）。なお、 β_x 、 β_y が求まれば、

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 = \frac{e_x^2}{V^2} + \frac{e_y^2}{V^2} = \frac{1}{V^2} \tag{8}$$

により V を求め、次に

$$e_x = \beta_x V, \quad e_y = \beta_y V \tag{9}$$

として単位ベクトル $\vec{e}$ の各成分が求まる。